Dr hab. Marian Turzański
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Szkoła Nauk Ścisłych UKSW

Recenzja Rozprawy Doktorskiej

mgr. Piotra Szewczaka

GO-przestrzenie i parazwartość w iloczynach kartezjańskich

Praca doktorska mgr Piotra Szewczaka została napisana pod kierunkiem Profesora Kazimierza Alstera. Jest poświęcona badaniu produktowalności w klasie przestrzeni parazwartych.
Teoria iloczynów kartezjańskich przestrzeni topologicznych z topologią Tichonowa jest podstawowym działem topologii ogólnej. Fakt, że iloczyn kartezjański przestrzeni normalnej przez siebie (na przykład prosta Sorgenfreya) nie musi być przestrzenią normalną skierował uwagę badaczy na te własności przestrzeni topologicznych, które zachowują się w wyniku mnożenia kartezjańskiego.

W swojej rozprawie doktorskiej pan mgr Piotr Szewczak skupił uwagę na klasie przestrzeni parazwartych. Przestrzenie te pojawiają się po raz pierwszy w pracy Dieudonne "Une generalization des espaces compact" Jour. de Math. Pueres at Appl. 23 (1944). Rozważana klasa przestrzeni jest wspólnym uogólnieniem klasy przestrzeni metrycznych i klasy przestrzeni zwartych.
Wspomniany wyżej przykład prostej Sorgenfreya, przykład przestrzeni normalnej, której produkt nie jest przestrzenią normalną prowadzi do postawienia pytania o charakteryzację klasy przestrzeni normalnych, których iloczyn przez dowolną przestrzeń normalna jest przestrzenią normalną (klasa $\mathcal{N}$). Prosta Sorgenfrey'a jest przestrzenią parazwartą. Każda przestrzeń parazwarta jest przestrzenią normalną. Wobec tego produkt przestrzeni parazwartych przestrzenią parazwartą być nie musi. Tak więc naturalne jest pytanie o charakteryzację klasy przestrzeni parazwartych, których iloczyn przez dowolną przestrzeń parazwartą jest przestrzenią parazwartą(klasa $\mathcal{P}$) . Problem ten pochodzi od Tamano. Udowodnił on interesujące twierdzenie
"Jeżeli $X \times Y$ jest przestrzenią normalną dla każdej przestrzeni normalnej Y, to $X \times Y$ jest przestrzenią parazwartą dla każdej przestrzeni parazwartej Y."
Charakteryzację wewnętrzną przestrzeni metryzowalnych należących do klasy $\mathcal{P}$ podał Morita.
"Przestrzeń metryczna X należy do klasy $\mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest σ-lokalnie zwarta."
Twierdzenie Tamano i szereg innych wyników mogło sugerować, że klasa $\mathcal{P}$ i klasa $\mathcal{N}$ są tymi samymi klasami. Przymusiński podał przykład przestrzeni ośrodkowej z pierwszym aksjomatem przeliczalności, parazwartej, której kwadrat jest przestrzenią normalną ale

nie jest parazwarty. Tym samym pokazał, ze klasy $\mathcal{N}$ i $\mathcal{P}$ są różnymi klasami przestrzeni. Przestrzenie metryzowalne spełniają pierwszy aksjomat przeliczalności. W recenzowanej rozprawie autor podejmuje próbę scharakteryzowania podklasy GO-przestrzeni z pierwszym aksjomatem przeliczalności, zawartej w klasie $\mathcal{P}$.(Rozdział pierwszy)
W badaniu klasy $\mathcal{P}$ ważną funkcję pełni pewna nieskończona gra topologiczna , w której bierze udział dwóch graczy, zdefiniowana przez Telgársky'ego. Telgársky udowodnił, że jeżeli X jest parazwarta i pierwszy gracz ma na niej strategię zwycięską, to X należy do klasy $\mathcal{P}$.
Wszystkie znane dotychczas przestrzenie, które należą do $\mathcal{P}$, spełniają założenia twierdzenia Telgarsky'ego. W związku z tym Alster postawił hipotezę, że w twierdzeniu tym jest równoważność i nazwał ją hipotezą Telgársky'ego.
Hipoteza Telgarskiego: "Przestrzeń parazwarta X należy do klasy $\mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy pierwszy gracz ma strategię zwycięską w grze $G(\mathbf{DC}, X)$."
Głównym twierdzeniem pracy podającym charakteryzację podklasy klasy $\mathcal{P}$ w zakresie GO-przestrzeni z pierwszym aksjomatem przeliczalności jest

Twierdzenie 1 *Jeżeli X jest parazwartą GO-przestrzenią spełniającą pierwszy aksjomat przeliczalności, to następujące warunki są równoważne:*

1. *$X \in \mathcal{P}$,*
2. *istnieje otwarta rodzina otoczeń $\{H_x : x \in X\}$, gdzie H_x jest otoczeniem punktu x dla $x \in X$ taka, że dla każdego $y \in X$ zbiór $Z_y = cl_X(\{x \in X : y \in H_x\})$ jest zwarty,*
3. *pierwszy gracz posiada strategię zwycięską w grze $G(\mathbf{DC}, X)$.*

Wynikanie z warunku ii) warunku iii) to twierdzenie Alstera, które ma fundamentalne znaczenie dla omawianej rozprawy.
Hoshima udowodnił
"Niech X będzie obrazem przestrzeni metrycznej przy odwzorowaniu ciągłym i domkniętym. X należy do klasy $\mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest σ-lokalnie zwarta."
W świetle tego twierdzenia ważne jest pytanie o przynależność do klasy $\mathcal{P}$ obrazów GO-przestrzeni. W rozdziale drugim autor dowodzi miedzy innymi następującego twierdzenia "Niech G będzie GO-przestrzenią zdefiniowaną na R oraz niech X będzie domkniętym obrazem przestrzeni G takim, że $X \in \mathcal{P}$. Wtedy pierwszy gracz posiada strategię zwycięską w grze $G(\mathbf{DC}, X)$."
Powyższe twierdzenie i pozostałe wyniki rozdziału drugiego można odczytać jako argumenty za hipotezą Alstera.
Najważniejsze wyniki omawianej rozprawy zostały przedstawione w rozdziale trzecim. Są to twierdzenie o przynależności do klasy $\mathcal{P}$.
Twierdzenie mówiące, że GO-przestrzeń parazwarta, którą można zanurzyć w iloczynie ω_1 kopii przestrzeni parazwartej spełniającej pierwszy aksjomat przeliczalności, należy do klasy $\mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy pierwszy gracz posiada w tej przestrzeni strategię zwycięską w grze Telgársky'ego jest najważniejszym wynikiem pracy, obejmuje swym zakresem główne twierdzenie rozdziału pierwszego.
Wyniki tego rozdziału zostały opublikowane we wspólnej pracy z promotorem.
Podobnie jak wyniki rozdziału pierwszego, również dla tego rozdziału kluczowe znaczenie mają wcześniejsze wyniki promotora.
Całość tej rozprawy postrzegam jako twórczą kontynuację prac Profesora Alstera.

Autor stosuje wiele ciekawych technik (np. gry topologiczne). Pozwoliło to na nowe spojrzenie na wcześniejsze wyniki dotyczące produktowalności w klasie $\mathcal{P}$.Poświęcony jest tym badaniom rozdział czwarty. Mimo, że wyniki nie są oryginalne, to zastosowane metody teorii gier okazały sie tak interesujące, że zostały uznane za godne opublikowania renomowanym czasopiśmie.

Autor w bibliografii swojej rozprawy umieścił szereg prac, które explicite nie są wykorzystywane. Znaczenie cytowanych, a pominiętych w omówieniu prac trudno przecenić, a ich omówienie we wstępie uzmysłowiłoby czytelnikowi znaczenie wyników recenzowanej pracy. Bez przykładów Michaela, Voungha a również ważnych przykładów z niecytowanych prac Alstera i Engelkinga oraz Przymusińkiego rozprawa może na czytelniku nie znającym bliżej problematyki zrobić wrażenie marginalnej. Tak nie jest, o czym świadczą publikacje w renomowanych czasopismach i grant NCN. podsumowując sprawę cytowań: z jednej strony mamy nadmiar pozycji w bibliografii, z drugiej strony są pozycje, które nie zostały zacytowane. Autor wprowadza w pierwszej części rozprawy (rozdział zerowy) oznaczenia dla klas rozpatrywanych przez siebie przestrzeni i operacji na nich. Jak sądzę celem tego zabiegu było uzyskanie spójnego zapisu twierdzeń, definicji i dowodów. Odbyło się to jednak kosztem czytelnika, który bez słownika symboli nie jest w stanie prawidłowo odczytać treść wypowiedzi.
Niestety rozprawa nie jest starannie napisana Na poziomie języka w pracy mamy "przestrzeń parazwartą" i "parazwartą przestrzeń", przedział otwarty" i "otwarty przedział". Ten brak dyscypliny językowej może prowadzić do niewłaściwego odczytania prezentowanego wyniku. Przy obecnych możliwościach unikanie rażących literówek nie jest zadaniem trudnym. Gorszą rzeczą jest niestaranne redagowanie wypowiedzi, pomyłki w oznaczeniach. Na przykład w jednym z lematów autor dowodzi własności podzbioru o numerze porządkowym następnikowym $\beta + 1$ używając w dowodzie β dla oznaczenia liczb porządkowych mniejszych. Formalnie nie jest to błędem, ale dla czytelnika jest to niepotrzebne utrudnienie w klarownym odbiorze idei dowodu. Autor podaje dwie różne definicje tego samego pojęcia, definicje, których równoważność nie jest widoczna bezpośrednio (przestrzenie K-rozproszone). Ponieważ praca w przeważającej części oparta jest na wcześniej opublikowanych artykułach, można odnieść wrażenie, że doktorant nie panuje nad większa formą, jaką jest rozprawa doktorska i nie najlepiej posklejał oraz przetłumaczył swoje wcześniejsze wyniki.

Zamieszczone uwagi krytyczne nie mają wpływu na ocenę merytoryczną pracy. Pan mgr Szewczak wykazał się głęboką wiedzą i dużymi umiejętnościami. Wyniki przedstawione w rozprawie opublikował w czasopiśmie Topology and application, które od ponad czterdziestu lat należy do grupy periodyków o decydującym wpływie na współczesną topologię. Dla realizacji prac badawczych związanych z rozprawą doktorant uzyskał grant NCN.

Stwierdzam, że w mojej opinii praca doktorska spełnia wymagania Ustawy o tytule i stopniach naukowych i wnoszę o dopuszczenie Pana Piotra Szewczaka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.