

prof. dr hab. Witold Marciszewski
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Piotra Szewczaka
„GO-przestrzenie i parazwartość w iloczynach kartezjańskich”**

Rozprawa poświęcona jest badaniu ważnej klasy \mathcal{P} przestrzeni parazwartych, których iloczyn kartezjański z dowolną przestrzenią parazwartą pozostaje parazwarty. Głównym problemem badawczym rozprawy jest tzw. hipoteza Telgársky’ego, postawiona przez promotora, prof. Kazimierza Alstera. Hipoteza ta mówi, że przestrzeń parazwarta X należy do klasy \mathcal{P} wtedy i tylko wtedy pierwszy gracz ma zwycięską strategię w pewnej nieskończonej grze topologicznej rozgrywanej w przestrzeni X . Definicja tej gry pochodzi od Telgársky’ego, który udowodnił jedną implikację w powyższej hipotezie (istnienie strategii jest warunkiem wystarczającym).

Większość wyników rozprawy dotyczy przestrzeni z klasy \mathcal{P} , które są jednocześnie GO-przestrzeniami, tj. podprzestrzeniami przestrzeni topologicznych liniowo uporządkowanych. To istotne ograniczenie pozwala na użycie w rozważaniach znacznie konkretniejszej, lepiej poznanej i łatwiejszej do badania struktury GO-przestrzeni. Rozważana podklasa pełni jednak bardzo istotną rolę w badaniach klasy \mathcal{P} , podstawowe przykłady przestrzeni parazwartych spoza klasy \mathcal{P} , to właśnie GO-przestrzenie.

Zdecydowana większość rezultatów rozprawy została opublikowana w 2 samodzielnych pracach autora oraz jednej pracy napisanej wspólnie z promotorem. Wszystkie te artykuły ukazały się w *Topology and its Applications*.

Rozdział 1 rozprawy zawiera wyniki dotyczące GO-przestrzeni spełniających pierwszy aksjomat przeliczalności. Najważniejszym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie pochodzące z pracy Alstera i Szewczaka, orzekające prawdziwość hipotezy Telgársky’ego dla parazwartych GO-przestrzeni X z pierwszym aksjomatem przeliczalności. Istotną częścią tego wyniku jest uzyskanie równoważności warunków z hipotezy Telgársky’ego z pewnym technicznym warunkiem wyrażonym

w terminach otoczeń przestrzeni X . Warunek ten pojawił się we wcześniejszej pracy Alstera, który udowodnił, że implikuje on istnienie zwycięskiej strategii pierwszego gracza w grze Telgársky'ego. Wspomniane twierdzenie jest istotnie wykorzystywane w dalszej części rozprawy. Rozdział ten zawiera ponadto cały szereg wyników autora dotyczących GO-przestrzeni mających pewne własności silniejsze niż pierwszy aksjomat przeliczalności.

W kolejnym rozdziale autor zamieścił wyniki dotyczące domkniętych obrazów GO-przestrzeni. Jedno z głównych twierdzeń mówi, że hipoteza Telgársky'ego zachodzi dla przestrzeni, które są domkniętymi obrazami GO-przestrzeni G zdefiniowanymi na prostej \mathbb{R} , tj. przestrzeniami G , dla których $G = \mathbb{R}$ jako zbiór, a topologia w G jest generowana przez pewną rodzinę przedziałów na prostej i jest bogatsza od topologii euklidesowej. Inny wynik mówi, że domknięte obrazy podprzestrzeni strzałki, które należą do klasy \mathcal{P} są przeliczalne.

Zdecydowanie najważniejszy wynik całej rozprawy znajduje się w rozdziale 3. Jest to twierdzenie, uzyskane wspólnie z promotorem, które potwierdza hipotezę Telgársky'ego dla parazwartych GO-przestrzeni X , które można zanurzyć w iloczyn M^{ω_1} , dla pewnej parazwartej przestrzeni M spełniającej pierwszy aksjomat przeliczalności, w szczególności hipoteza Telgársky'ego zachodzi dla GO-przestrzeni o ciężarze nie większym od ω_1 .

Ostatni rozdział rozprawy zawiera dowód twierdzenia mówiącego w szczególności, że klasa parazwartych przestrzeni, dla których istnieje zwycięska strategia pierwszego gracza w grze Telgársky'ego, jest zamknięta na iloczyny kartezjańskie. Jak pisze autor, wyniki tego rozdziału można wywnioskować z pracy Yajimy opublikowanej w latach osiemdziesiątych, dlatego też oceniam je jako najmniej znaczące spośród wyników rozprawy.

Wyniki rozprawy dotyczą interesującej tematyki badawczej, uzyskane rezultaty są ciekawe, stanowią istotny wkład w badanie ważnej klasy przestrzeni topologicznych. Bez wątplenia najbardziej wartościowe wyniki są zawarte w rozdziale 3, są to rezultaty uzyskane wspólnie z promotorem rozprawy (według oświadczenia promotora wkłady obydwu autorów w uzyskanie wspólnych rezultatów były równe). Rozumowania prowadzące do uzyskania tych wyników są zdecydowanie najbardziej pomysłowe i złożone technicznie w całej rozprawie. Są to bardzo skomplikowane argumenty, wykorzystujące subtelne narzędzia dowodowe stworzone przez Kazimierza Alstera w jego kilku wcześniejszych pracach.

Rozprawa pokazuje, że jej autor opanował dobrze literaturę dotyczącą tej tematyki badawczej i potrafi ją umiejętnie stosować.

Mam natomiast bardzo liczne i istotne zastrzeżenia co do strony redakcyjnej rozprawy, co znacząco wpływa na obniżenie jej oceny. W wielu miejscach brakowało mi dostatecznej ilości objaśnień, szereg sformułowań nie jest odpowiednio precyzyjnych, a co gorsza, niektóre ze stwierdzeń nie są prawdziwe. Szczegółowe zastrzeżenia przekazywałem autorowi w wielu rozmowach, pozwolę sobie tylko wymienić niektóre z miejsc, w których napotkałem problemy:

- niejasny opis (na str. 17) strategii graczy w grze Telgársky’ego i dotyczących tego wyników Galvina i Telgársky’ego,
- błędna formuła w Kroku A w dowodzie twierdzenia 1.2.1, również liczne inne drobne usterki w tym dowodzie,
- niepoprawny dowód faktu 1.3.3 (brak założenia używanego w rozumowaniu),
- usterka w dowodzie obserwacji 1.5.2,
- liczne usterki i niejasności w Kroku A dowodu obserwacji 2.1.2,
- niepoprawne sformułowanie uwagi 2.1.4 (brak założenia),
- usterka w dowodzie obserwacji 2.1.7,
- błędne sformułowanie i niepoprawny dowód lematu 2.1.8,
- liczne usterki i niejasności w dowodzie twierdzenia 3.1.2.

Muszę tu zaznaczyć, że poza jednym wyjątkiem (lemat 2.1.8, którego poprawionej wersji przesłanej przez autora nie zdołałem już przestudiować), wszystkie powyższe błędy udało się skorygować, po wyjaśnieniach Piotra Szewczaka.

Oprócz powyższych, poważniejszych usterek w rozprawie występuje, bardzo znaczna liczba literówek, niektóre z nich, występujące w słowach z języka potocznego rzucają się w oczy już przy pobieżnym przeglądaniu pracy. Jest oczywiste, że rozprawa została złożona do recenzji przed należyтым dopracowaniem i sprawdzeniem strony redakcyjnej. Trudno to zrozumieć, zwłaszcza, gdy weźmie się pod uwagę to, że wszystkie publikacje zawierające zdecydowaną większość wyników rozprawy zostały złożone do druku co najmniej 2 lata przed ukończeniem rozprawy. Analizowanie tak przygotowanego tekstu pochłonęło znacznie więcej czasu i wysiłku niż powinno. Bez dodatkowych wyjaśnień autora i jego korekt tekstu nie byłbym w stanie przebrnąć przez szereg rozumowań. Ze względu na te trudności oraz ograniczenia czasu recenzji nie udało mi się w pełni zweryfikować poprawności istotnej części wyników rozprawy.

W mojej ocenie rozprawa zawiera materiał na bardzo dobrą pracę doktorską, jednak sposób jego prezentacji sprawił, że trudno jest w pełni docenić walory zawartych w niej wyników. Jakość redakcji rozprawy również istotnie ograniczyła możliwości kompletnej weryfikacji uzyskanych rezultatów.

Podsumowując, pomimo wspomnianych powyżej zastrzeżeń, uważam, że praca pana mgra Piotra Szewczaka bez wątpienia spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Witold Marciszewski